

CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı:

24.05.2019

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Mat 204 Analitik Geometri II Final Sınav Soruları

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$ koniğini standart forma getirip grafiğini çiziniz.
2. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ hiperbolünün odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.
3. $y = 2x + 1$ doğrusu üzerinde $A(0,1)$, $B(1,3)$ ve $C(2,5)$ noktaları veriliyor. C nin AB ye göre harmonik eşi olan noktayı bulunuz.
4. $P_1(0,0)$ noktasında $d_1 \dots x - 2y = 0$ ve $P_2(1,-1)$ noktasında $d_2 \dots y + 1 = 0$ doğrusuna teğet olan konik ailesinin denklemini yazınız. Ailede çember, ikizkenar hiperbol ve parabol olup olmadığını araştırınız.
5. Aşağıdaki kuadriklerin çeşidini belirleyiniz.
 - a. $x^2 - 4y^2 + z^2 + 4 = 0$
 - b. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$
 - c. $-2x^2 + 3y^2 - z = 0$
 - d. $2x^2 - y = 0$
6. Keşisen iki doğruya göre yansımayı irdeleyiniz.

Başarılar

Prof. Dr. Emin KASAP

1- $A=1, B=2, C=1, D=0, E=-4\sqrt{2}, F=4$ olm. üzere

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{1-1} = \infty$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}. \text{ Buradan}$$

$$\begin{cases} x = \cos\alpha x' - \sin\alpha y' \\ y = \sin\alpha x' + \cos\alpha y' \end{cases} \quad \text{dönme denkleminde } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ yazılırsa}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \{x' - y'\} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \{x' + y'\} \end{cases} \text{ elde edilir. Bunları verilen konikte}$$

yerine yazarsak

$$\frac{1}{2} \{x'^2 - 2x'y' + y'^2\} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \{x' - y'\} \{x' + y'\} + \frac{1}{2} \{x'^2 + 2x'y' + y'^2\} - 4\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \{x' + y'\} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x'^2 - 4x' - 4y' + 4 = 0 \quad \text{dır. Şimdi,}$$

$$\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases} \quad \text{ötelemesini uyguluyarak son konik denklemini}$$

$$2(x''+h)^2 - 4(x''+h) - 4(y''+k) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x''^2 + (4h-4)x'' - 4y'' + 2h^2 - 4h - 4k + 4 = 0$$

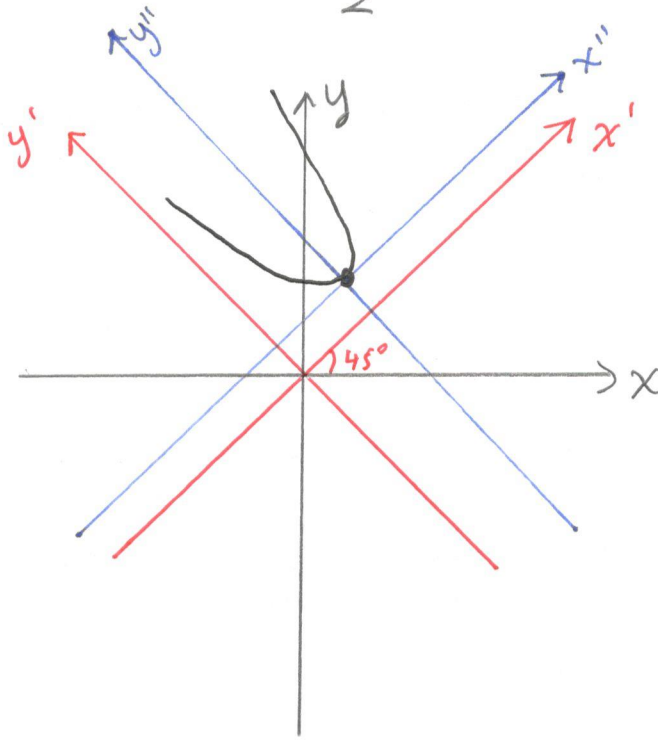
halini alır. Burada

$$\begin{cases} 4h-4=0 \\ 2h^2-4h-4k+4=0 \end{cases} \quad \text{olduğudur. Böylece,}$$

$h=1$ ve $k=\frac{1}{2}$ buluruz.

$$2x''^2 - 4y'' = 0$$

Parabol



$$2. - \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$a=3$, $b=5$ olmak üzere

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ den } c = \sqrt{34}$$

Odaklar $\rightarrow F_1(0, \sqrt{34})$, $F_2(0, -\sqrt{34})$

Dış Merkezlik $\rightarrow e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{34}}{5}$

Doğrultular $\rightarrow y = \pm \frac{b^2}{c} \rightarrow y = \frac{25}{\sqrt{34}}$, $y = -\frac{25}{\sqrt{34}}$

3- C nin AB ye göre harmonik eşi olan nokta

D(x,y) olsun. O zaman

$$(AB, CD) = -1 \Rightarrow \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CA}/\overline{CB}}{\overline{DA}/\overline{DB}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = -1 \text{ dir.}$$

x- bileşeni için

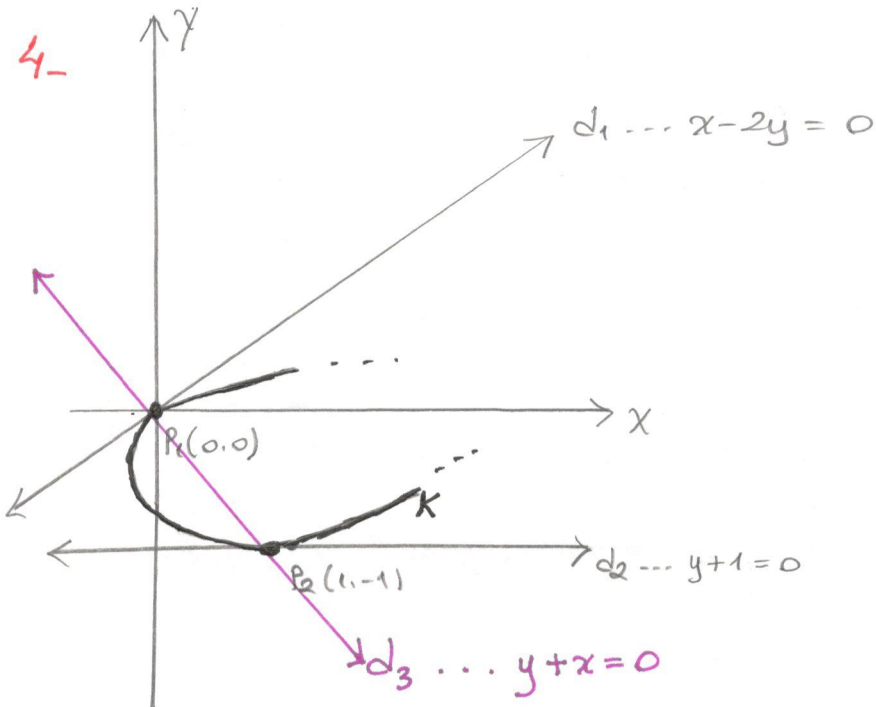
$$\frac{0-2}{1-2} \cdot \frac{1-x}{0-x} = -1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

y- bileşeni için

$$\frac{1-5}{3-5} \cdot \frac{3-y}{1-y} = -1 \Rightarrow \frac{y-3}{y-1} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{7}{3} \text{ olup } D\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) \text{ dir.}$$



$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= d_1 \cdot d_2 = (x - 2y)(y + 1) \\ &= xy + x - 2y^2 - 2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x, y) &= d_3^2 = (y + x)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

olmak üzere konik ailesinin denklemini

$$\Rightarrow \phi_1(x, y) + \lambda \phi_2(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda}_{=A} x^2 + \underbrace{(2\lambda + 1)}_{=B} xy + \underbrace{(\lambda - 2)}_{=C} y^2 + \underbrace{x}_{=D} - \underbrace{2y}_{=E} = 0 \text{ elde edilir.}$$

1- Ailede çember var mıdır?

$A = C$ ve $B = 0$ olursa genel konik denklemini çember belirtir.

$B = 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/2$ olup $A = -1/2 \neq C = -5/2$ olur ki ailede çember yoktur.

2- Ailede ikiz kenar hiperbol var mıdır?

$\Delta < 0$, $A + C = 0$ olursa genel konik denklemini ikiz kenar hiperbol belirtir.

$$A + C = 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ olur. O zaman konik}$$

$$K_1 \dots x^2 + 3xy - y^2 + x - 2y = 0 \text{ bulunur. Buradan,}$$

$$\Delta = 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 9 = -13 < 0 \text{ dır. Sonuç olarak } K_1 \text{ koniği}$$

ikiz kenar hiperboldür.

3- Ailede parabol var mıdır?

$\Delta = 0$ olursa genel konik denklemi parabol belirtir.

$$\Delta = 4 \cdot \lambda(\lambda - 2) - (2\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1/12 \text{ olur. O zaman, konik denklemi}$$

$$K_2 \dots -1/12 x^2 + \frac{5}{6} xy - \frac{25}{12} y^2 + x - 2y = 0$$

veya

$$K_2 \dots x^2 - 10xy + 25y^2 - 12x + 24y = 0 \text{ bulunur.}$$

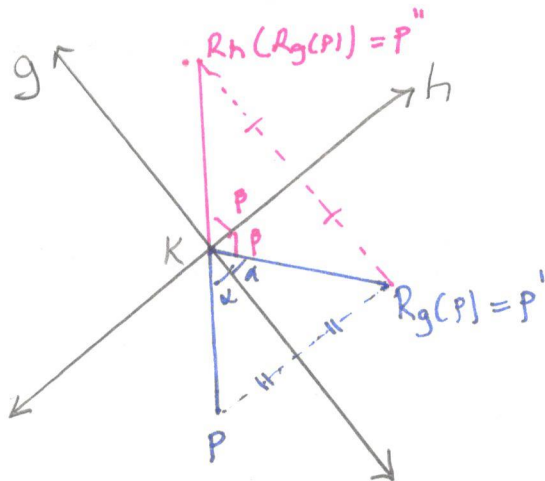
5- a) $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \rightarrow$ çift konatlı hiperboloid

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = y^2 \rightarrow$ Eliptik koni

c) $-2x^2 + 3y^2 = z \rightarrow$ Hiperbolik Paraboloid

d) $y = 2x^2 \rightarrow$ Parabolik silindirik

6- g ve h kesiren iki doğru olsun. g doğrusuna göre yansıma R_g , h doğrusuna göre yansıma R_h ile gösterilsin.



$$P \rightarrow (R_h \circ R_g)(P) = P''$$

O halde $R_h R_g$ bileşkesi K noktası etrafında $2\alpha + 2\beta$ açılı bir dönmedir.